

Eine allgemein verständliche Erklärung zum Gravimagnetismus

Wolfenbüttel, den 20.Mai 2004

von Prof. Dr. Claus W. Turtur
Fachhochschule Braunschweig- Wolfenbüttel
Salzdahlumer Straße 46 / 48
GERMANY - 38302 Wolfenbüttel
Tel.: (++49) 5331 / 939 - 3412
E-mail.: c-w.turtur@fh-wolfenbuettel.de

Zusammenfassung:

Zu den zahlreichen Aussagen der Einstein'schen Gravitationstheorie zählt auch die Erscheinung des Gravimagnetismus, die bereits 1918 von Thirring und Lense [THI 18] beschrieben wurde. Um diese Effekt zu verstehen, benötigt man eigentlich das Handwerkszeug der Allgemeinen Relativitätstheorie, das nur Spezialisten wirklich verständlich ist. Im vorliegenden Artikel wird eine einfache, allgemein verständliche Erklärung dieses Effekts präsentiert, die sogar von Studenten in den ersten Semestern nachvollzogen werden kann und nur die Kenntnis klassischer Physik voraussetzt.

Gliederung:

- (1.) Qualitative Erklärung der Grundlagen
- (2.) Eine Analogie zwischen Gravitation und Elektrizität
- (3.) Das Beispiel eines Kreisels im gravimagnetischen Feld der Erde
- (4.) Literaturhinweise

Teil 1.: Qualitative Erklärung der Grundlagen

Von der elektromagnetischen Wechselwirkung ist bekannt, daß sie einen statischen und einen dynamischen Anteil aufweist. Die elektrostatische Komponente ist anhand von Ladungen in elektrischen Feldern nach dem Coulomb- Gesetz bestimmbar, die elektrodynamische (=elektromagnetische) Komponente ist anhand bewegter Ladungen nach dem Gesetz von Biot- Savart erklärt. [ALE 71/81].

Der Unterschied zwischen der elektrostatischen und der elektromagnetischen Kraft ist alleine eine Koordinatentransformation. Bewegt sich eine Testladung synchron mit der selben Geschwindigkeit wie die felderzeugende Ladung, so wird nur ein elektrostatisches Feld wahrgenommen. Bewegt sich hingegen die Testladung relativ zur felderzeugenden Ladung, so nimmt sie zusätzlich noch eine elektromagnetische Kraft wahr. Nachdem die Koordinatentransformation sowohl in der Elektrodynamik als auch in der Gravitation eine entscheidende zentrale Rolle spielt, liegt der Verdacht nahe, daß sich das Prinzip der statischen und dynamischen Kräfte von der Elektrizitätslehre auf die Gravitation übertragen läßt. Wie wir auf den nächsten Seiten sehen werden, ist dies tatsächlich der Fall. Die Analogie ist in Tabelle 1 veranschaulicht. Wie wir sehen werden, ist sie weitreichend genug, um den Thirring- Lense-Effekt zu erklären.

	elektrische Kräfte	gravitatorische Kräfte
statische Kräfte	elektrostatische Wechselwirkung (Berechnung nach Coulomb)	gravitostatische Wechselwirkung (Berechnung nach Newton)
dynamische Kräfte (magnetische)	elektromagnetische Wechselwirkung (Berechnung nach Biot- Savart)	gravimagnetische Wechselwirkung (Berechnung nach Einstein, Thirring- Lense- Effekt)
Tabelle 1.: Veranschaulichung der Analogie statischer und dynamischer Kräfte zwischen Elektrizitätslehre und Gravitation		

Die Berechnungen nach Coulomb, nach Biot- Savart und nach Newton sind wohlbekannt und experimentell derart gut überprüft, daß sie heute sogar zum Standard- Repertoire eines Technikers gehören. Ganz anders verhält es sich beim Gravimagnetismus, der als Thirring- Lense- Effekt eher nur Spezialisten bekannt ist und üblicherweise mit Hilfe von Einstein's Allgemeiner Relativitätstheorie berechnet wird (siehe z.B. Bücher wie [GOE 96] oder [SCH 02]). Das Problem ist, daß dieser Effekt wegen seiner sehr äußerst geringen Kräfte nur schwer nachweisbar ist, wie wir auch im Laufe des vorliegenden Artikels sehen werden.

Tatsächlich ist der Nachweis bis heute noch nicht gelungen. Weltweit gibt es derzeit ein einziges Experiment, das in absehbarer Zeit Ergebnisse erhoffen läßt, und zwar unter dem Namen "Gravity- Probe- B Experiment" [GPB 04]. Um den Einfluß der gravitostatischen Schwerkraft zu unterdrücken wird hierfür ein Satellit benötigt, in dem sich Gyroskope befinden, deren Präzision die Meßgenauigkeit der derzeit genauesten Satellitengyroskope in modernen Satelliten-Navigationssystemen um 8 Zehnerpotenzen übertrifft (siehe [DIT 99]).

Ein anderes Experiment der European Space- Agency (ESA) [HYP 00] befindet sich derzeit erst in der Phase der Planung und läßt mittel- bis längerfristig Ergebnisse erhoffen, die anhand von Atomstrahl- Interferometrie gewonnen werden sollen, einem Verfahren welches eine größere Meßgenauigkeit verspricht als das rein mechanische Gravity- Probe- B Experiment.

Sieht man den immensen Aufwand, den die Wissenschaft betreibt, um den Effekt des Gravimagnetismus überhaupt nur nachweisen zu können, so wird zweierlei klar: Einerseits leuchtet ein, warum dieser physikalischen Effekt so wenig untersucht ist, andererseits wird aber auch klar, welch immense Bedeutung dieser Effekt für das fundamentale Verständnis der Physik haben muß, um einen derart großen Aufwand zu rechtfertigen.

Um nun diesen gravimagnetischen Effekt, der auch unter dem Namen Thirring- Lense- Effekt bekannt ist, für ein breites Publikum verständlich zu machen, können wir der Analogie der Tabelle 1 folgen und die Formeln der elektromagnetischen Kräfte auf die Kräfte der gravimagnetischen Kräfte übertragen. Diesen Gedankengängen wollen wir uns nun widmen.

Teil 2.: Eine Analogie zwischen Gravitation und Elektrizität

(2.a.) Die Analogie der statischen Kräfte

Diese Analogie ist bekannt und wird in Gleichung 1 wiedergegeben.

Elektrostatische Kraft F_{es}

$$\vec{F}_{es} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \hat{e}_{\Delta r} \quad (\text{Glg. 1})$$

mit q_1, q_2 = Ladungen und m_1, m_2 = Massen

als Vermittlungsgrößen der jeweiligen Wechselwirkung

und \vec{r}_1, \vec{r}_2 = Orte der beiden Massen bzw. Ladungen

$\hat{e}_{\Delta r}$ = Einheitsvektor von einem Wechselwirkungspartner zum anderen

sowie den Proportionalitätsfaktoren

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.893 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

"Negatives" Vorzeichen steht für anziehende Kraft, "positives" Vorzeichen für abstoßende Kraft.

Anmerkung zum Feld-Begriff:

Eine punktförmige Ladung q_1 erzeugt (ohne Bewegung) ein statisches elektrisches Feld

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \hat{e}_{\Delta r}, \quad (\text{Glg. 2})$$

in dem eine andere punktförmige Ladung q_2 die Kraft \vec{F}_2 erfährt mit $\vec{F}_2 = q_2 \cdot \vec{E}_1$

Bis auf die Proportionalitätsfaktoren und die Tatsache, dass die Vermittlungsgrößen unterschiedliche Namen tragen (Massen bzw. Ladungen), sehen die Formeln der Elektrostatik und die der Gravitostatik absolut identisch aus. Die Analogie sticht sofort ins Auge.

(2.b) Die Analogie der magnetischen (dynamischen) Kräfte

Bewegt man die Ladung q_1 (relativ zur Ladung q_2), so wird zusätzlich zum statischen elektrischen Feld \vec{E} noch ein magnetisches Feld \vec{H} erzeugt, welches entsprechend Abbildung 1 und den Gleichungen 3a und 3b nach Biot- Savart berechnet werden kann.

$$d\vec{H} = \frac{d}{dt} \cdot q_i \cdot \frac{\vec{ds} \times (\vec{s} - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s} - \vec{r}|^3} \quad (\text{Glg. 3a})$$

$$\vec{H}_{\text{ges}} = \int_{\text{Bahnkurve}} d\vec{H} \quad (\text{Glg. 3b})$$

Darin ist:

q_i = Ladung

dt = Zeit (infinitesimal klein)

\vec{s}, \vec{ds} = Bahnkurve der Bewegung (und Element)

$d\vec{H}$ = Magnetfeld (infinitesimales Feldelement)

\vec{r} = Ort, an dem das Magnetfeld berechnet wird.

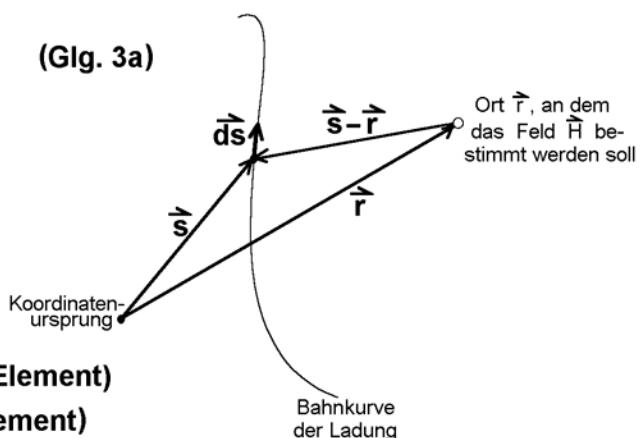


Abb.1:
Veranschaulichung zur Berechnung des magnetischen Feldes nach Biot-Savart

Gleichung 3a drückt das infinitesimale Feld $d\vec{H}$ eines infinitesimalen Leiterelements $d\vec{s}$ aus. Integration über die Bahnkurve der bewegten Ladungsträger (dies ist der Verlauf des Leiters) liefert dann das gesamte Feld, welches von einer bewegten Ladung erzeugt wird. Wir sehen es in Gleichung 3b.

Nun gilt unser Interesse aber nicht einem abstrakten Feld sondern der tatsächlichen magnetischen Kraft zwischen bewegten Ladungen. Diese Kraft kennen wir als Lorentz-Kraft nach Gleichung 4a, wobei \vec{v} die Geschwindigkeit ist, mit der sich die Ladung q relativ zum Feld \vec{H} bewegt.

$$\vec{F}_{\text{em}} = \mu_0 q_2 \cdot (\vec{v} \times \vec{H}) \quad (\text{Glg. 4a})$$

Ähnlich dem ε_0 der statischen Kräfte wird auch im dynamischen Fall wieder ein Proportionalitätsfaktor benötigt, damit der Zusammenhang zwischen den Vermittlungsgrößen (q , \vec{v} , \vec{H}) und der Wirkung (Kraft \vec{F}) passt. Im elektrodynamischen Fall heißt er

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad (\text{Glg. 4b})$$

Häufig führt man noch die Abkürzung

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (\text{Glg. 4c})$$

ein (im Vakuum) und nennt \vec{B} die magnetische Induktion.

Die Lorentz-Kraft finden wir damit in der gewohnten Form wieder: $\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$ **(Glg. 4d)**

In völliger Analogie zu dieser elektromagnetischen Kraft lässt sich nun die gravimagnetische Kraft berechnen. Wählen wir hierzu die Bezeichnungen der gravimagnetischen Größen entsprechend Tabelle 2.

elektrische Größe	gravitatorisches Analogon
\vec{E} = elektrostatisches Feld	\vec{G} = gravitostatisches Feld
\vec{H} = elektromagnetisches Feld	\vec{K} = gravimagnetisches Feld
\vec{B} = elektromagnetische Induktion	\vec{C} = gravimagnetische Induktion
I = elektrischer Strom	J = Massestrom
μ_0 = elektromagnetische Induktionskonstante	β = gravimagnetische Induktionskonstante

Tabelle 2: Wahl der gravimagnetischen Größen in Analogie zu den elektrischen Größen

Zur Bestimmung der Größen \vec{K} , \vec{C} , J und β greifen wir nun auf die Gleichungen der Elektrodynamik zurück:

Das gravimagnetische Feld \vec{K} , welches von einer Masse m im Punkt \vec{r} erzeugt wird, beschreibt Gleichung 5 in Analogie zu den Gleichungen 3a und 3b.

$$\vec{K} = \int_{\text{Bahnkurve}} d\vec{K} = \dots = \int_{\text{Bahnkurve}} m_1 \cdot \frac{\vec{dv} \times (\vec{s} - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s} - \vec{r}|^3} \quad (\text{Glg. 5})$$

Gleichung 6 zur Angabe der gravimagnetischen Induktion \vec{C} entspricht Gleichung 4c.

$$\vec{C} = \beta \cdot \vec{K} \quad (\text{Glg. 6})$$

Damit liegt die Kraft auf eine bewegte Masse m_2 im Feld der gravimagnetischen Induktion \vec{C} (welches von der Masse m_1 hervorgerufen wird) entsprechend der Lorentz-Kraft auf der Hand:

$$\vec{F}_{\text{em}} = q_2 \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

(elektromagnetische Kraft)

$$\vec{F}_{\text{gm}} = m_2 \cdot (\vec{v} \times \vec{C})$$

(gravimagnetische Kraft)

(Glg. 7 a&b)

Alles was noch fehlt, ist eine Angabe zum Proportionalitätsfaktor β in Gleichung 6. Auch hierzu ist unser Analogiebild in der Lage, was in Tabelle 3 aufgezeigt ist. Alles was man dazu voraussetzen muß, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Gravitationswellen. Diese hat bekanntlich den selben Wert wie die Ausbreitungsgeschwindigkeit elektromagnetischer Wellen, nämlich die Lichtgeschwindigkeit c .

Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit steht bekanntlich im Zusammenhang mit dem Produkt aus den Proportionalitätsfaktoren der statischen und der magnetischen (=dynamischen) Felder entsprechend Gleichung 7.c.

$$\mu_0 \cdot \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \quad (\text{Glg. 7c})$$

	elektrischer Fall	gravimagnetischer Fall
Proportionalitätsfaktor der statischen Kraftberechnung	$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.893 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$	$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$
Proportionalitätsfaktor der dynamischen Kraftberechnung	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Ns}^2}{\text{C}^2}$	$\beta = ?$
Verknüpfung zwischen dem statischen und dem dynamischen Proportionalitätsfaktor mit $c = \text{Lichtgeschw.}$ $c = 2.998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\mu_0 \cdot \epsilon_0 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow \frac{\mu_0}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} = \frac{4\pi}{c^2}$ <small>(siehe Glg. 7c)</small>	Ins Analogiebild übertragen: $\frac{\beta}{\gamma} = \frac{4\pi}{c^2} \Rightarrow \beta = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \gamma$ $\Rightarrow \beta = 9.3255 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Ns}^2}{\text{kg}^2}$

Tabelle 3.:
Analogietabelle zur Berechnung der graviamagnetischen Induktionskonstanten

Sehen wir die Größenordnung der Proportionalitätskonstanten β ($9.3255 \cdot 10^{-27} \frac{\text{Ns}^2}{\text{kg}^2}$), so ist klar, wie winzig gravimagnetische Kräfte sein müssen. Dies läßt sich z.B. anhand eines Kreisels auch quantitativ veranschaulichen, wie man in Teil 3 sehen kann.

Teil 3.: Das Beispiel eines Kreisels im gravimagnetischen Feld der Erde

Elektromagnetische Kräfte werden typischerweise als Kräfte zwischen stromdurchflossenen Leitern gemessen. Entsprechend werden gravimagnetische Kräfte zwischen zwei rotierenden Kreiseln zu messen sein. (Genau dies versucht das Gravity- Probe- B Experiment.)

Um den meßbaren Effekt möglichst groß zu gestalten, ist es sinnvoll, die Größe des Gravimagnetfeld erzeugenden Kreisels zu maximieren. Der größte (in unserer Nähe) vorhandene

Kreisel ist die Erdkugel mit ihrer Rotation (Masse $m = 5.985 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, Umlaufdauer $T=86164 \text{ sec.}$ relativ zum Sternenhimmel). Darauf basierend sei unser Beispiel in die folgenden beiden Teile aufgeteilt:

- Bestimmung des gravimagnetischen Feldes der Erde.
- Als Beispiel: Die Reaktion eines Kreisels auf das gravimagnetische Feld der Erde.

(3.a) Bestimmung des gravitomagnetischen Feldes der Erde.

Da hierfür nach Gleichung 5 ein dreidimensionales vektorwertiges Integral gelöst werden muß, dessen Integrand auch nicht ganz einfach ist, ist eine numerisch iterative Integration das einzige sinnvolle Verfahren. Dazu wird die Erde in finite Elemente untergliedert (durchnummieriert mit der Nummer "i") und aus Gleichung 5 die nachfolgende Gleichung 8 für jedes einzelne Element extrahiert:

$$\widehat{dK}_i = dm_i \cdot \frac{\vec{v}_i \times (\vec{s}_i - \vec{r})}{4\pi \cdot |\vec{s}_i - \vec{r}|^3} \quad \begin{aligned} &\text{, wo } i = \text{Nummer des jeweiligen finiten Elements} \\ &\vec{v}_i = \text{Geschwindigkeit des Elements Nr. } i \\ &\vec{s}_i = \text{Ortsvektor des Elements Nr. } i \\ &\vec{r} = \text{Ort, an dem das Feld } d\widehat{K}_i \text{ bestimmt werden soll} \end{aligned} \quad (\text{Gl.8})$$

Demzufolge wird für jedes einzelne Element der Untergliederung (also das Massenelement dm_i) das Feld $d\widehat{K}_i$ am Aufpunkt (also am Punkt mit dem Ortsvektor \vec{r}) bestimmt, und anschließend wird das dreidimensionale Volumenintegral über die Erdkugel durch Summation aller Elemente $d\widehat{K}_i$ realisiert.

Dazu sind die folgenden vier Anmerkungen zu beachten:

- (i.) Die Dichte der Erde wurde aus dem “Preliminary Reference Earth Model“ übernommen, welches in der Geologie und der Geophysik bekannt ist [BUL 85]. Der Wert der Dichte als Funktion des Abstandes vom Erdmittelpunkt ist graphisch dargestellt in Abbildung 2.

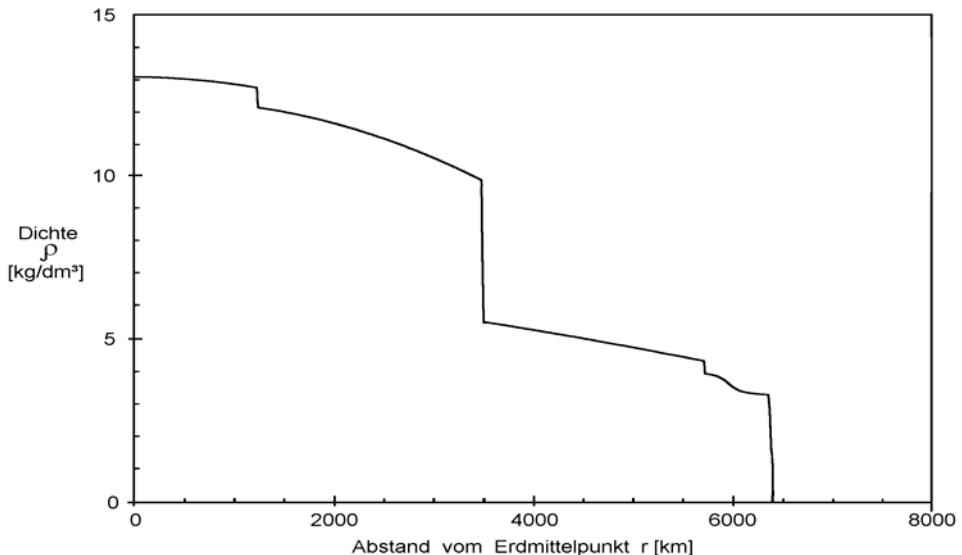


Abb.2: Dichte der Erde als Funktion des Abstandes vom Erdmittelpunkt nach dem Preliminary Reference Earth Model.

- (ii.) Wie die Rechnung zeigt, ist die gravimagnetische Feldstärke vom geographischen Längengrad des Aufpunktes unabhängig. Dies ist aufgrund der Rotationssymmetrie um die polverbindende Achse auch gar nicht anders zu erwarten. Im übrigen wird hier der Breitengrad gemäß der in der Mathematik üblichen Bezeichnung des Winkels θ in Kugelkoordinaten angegeben (Nordpol: $\theta=0^\circ$; Äquator: $\theta=90^\circ$; Südpol: $\theta=180^\circ$, vgl. Abb.3), anders als nach der in der Geographie üblichen Art und Weise. Veranschaulicht wird dies durch Abbildung 3, angewandt wird es in Abbildung 5. Dort ist die gravimagnetische Feldstärke als Funktion des Breitengrades wiedergegeben.

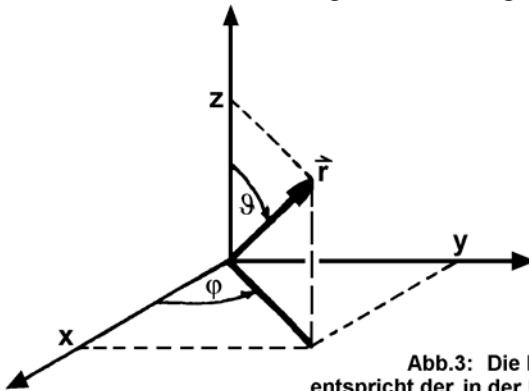


Abb.3: Die Festlegung der Kugelkoordinaten entspricht der in der Mathematik üblichen Nomenkatur

- (iii.) Da der Vektor der gravimagnetischen Feldstärke an die Erdkugel mit ihrer Rotation starr gekoppelt ist, genügt die Berechnung des \vec{K} -Vektors zu einem einzigen (beliebigen) Zeitpunkt. Das gesamte gravimagnetische Feld der Erde ($\vec{K} = \vec{K}_{ges}$) wird dann in kartesischen Koordinaten angegeben (siehe Gleichung 9), welches starr mit der Erde verbunden ist (siehe Abbildung 4).

$$\vec{K}_{ges.} = \sum_i \vec{dK}_i = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix} \quad (\text{Glg. 9})$$

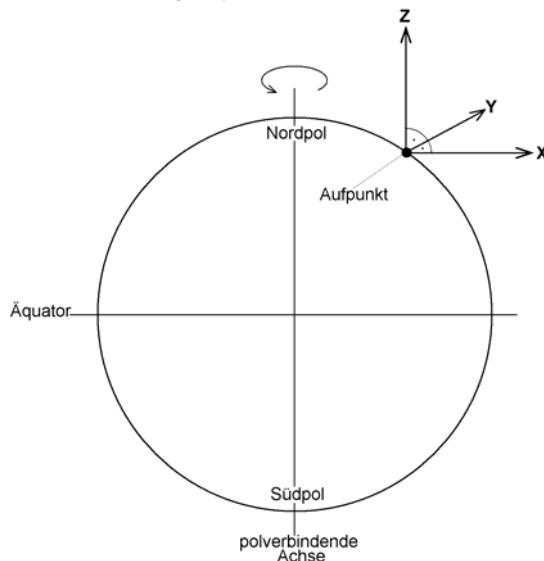


Abb.4: Darstellung des hier verwendeten Koordinatensystems, in dem die gravimagnetische Feldstärke der Erde angegeben werden wird.

- (iv.) Das gesamte gravimagnetische Erdfeld \vec{K} (als Ergebnis der Integration) ist in Abb. 5 dargestellt, und zwar die drei kartesischen Komponenten und der Betrag der Feldstärke als Funktion des Breitengrades in mathematischer Angabe.

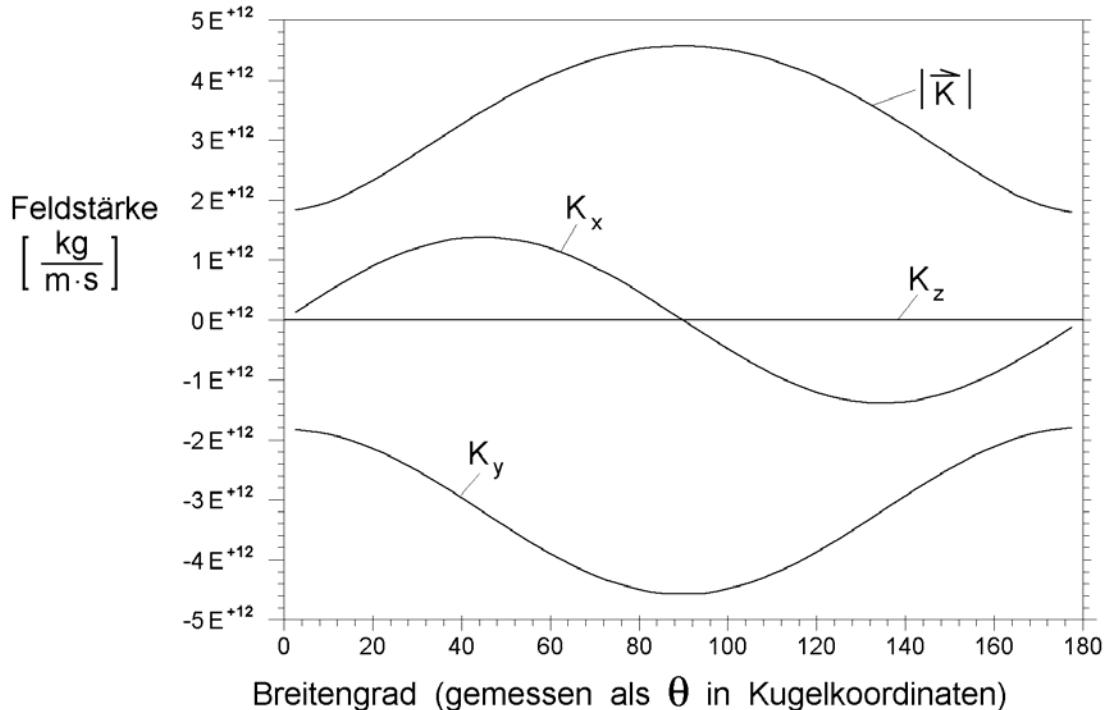


Abb. 5: Gravimagnetische Feldstärke der Erde (Vektor \vec{K}) als Funktion des Ortes des Aufpunkts (angegeben durch seinen Breitengrad)
Dargestellt sind die kartesischen Komponenten sowie der Betrag der Feldstärke.

Damit ist das gravimagnetische Feld der Erde bestimmt. Die gravimagnetische Induktion der Erde ergibt sich dann durch Multiplikation mit der Feldkonstanten β entsprechend Gleichung 10.

$$\vec{C} = \beta \cdot \vec{K} = \vec{K} \cdot 9.3255 \cdot 10^{-27} \frac{Ns^2}{kg^2} \quad (\text{Glg. 10})$$

Wenden wir uns damit nun der Reaktion eines Kreisels auf dieses Feld zu.

(3.b) Das Beispiel eines Kreisels im Gravimagnetfeld der Erde.

So wie das elektromagnetische Feld der Erde mit einem Kompass nachzuweisen ist, so sollte auch das gravimagnetische Erdfeld mit einem Kreisel nachzuweisen sein - vorausgesetzt, die Meß- Empfindlichkeit des Kreisels reicht aus.

Wie die Magnetnadel im Kompass mehr oder weniger willkürlich gewählt werden kann, wählen wir für ein Beispiel im Sinne einer Übungsaufgabe ein Schwungrad als Kreisel mit den Abmessungen:
 Raddurchmesser = 2 m

Gesamtmasse = 1000 kg

Umlaufdauer = 1 milliseç. (pro Einzelumlauf)

Für unsere Übungsaufgabe hat das Schwungrad den Vorteil einer möglichst einfach verständlichen Geometrie. Dies ist der Grund für die Wahl des Schwungrades als Kreiselform für unser Übungsbeispiel, damit die Überlegungen nicht unnötig verkompliziert werden. Der Übersichtlichkeit halber gestalten wir außerdem die Orientierung der an der Berechnung beteiligten Vektoren möglichst einfach. Dies ist der Fall, wenn wir zum Bsp. den Kreisel am Ort des Äquators platzieren und um eine zum Vektor \vec{r} parallele Achse rotieren lassen (vgl. Skizze in Abbild 6).

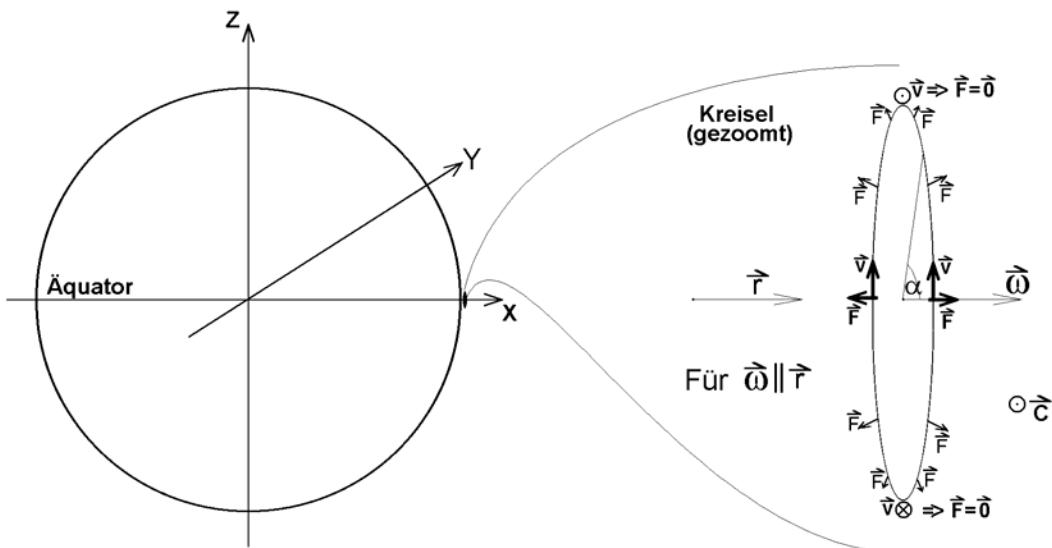


Abb.6.: Gravitomagnetische Kräfte auf einen ringförmigen Kreisel, der in der yz-Ebene rotiert.
(Drehimpulsvektor in x-Richtung)

Das gravimagnetische Feld \vec{K} und die gravimagnetische Induktion \vec{C} der Erde stehen am Äquator exakt in negativer y-Richtung und haben die Feldstärken

$$K_y = -4.6 \cdot 10^{+12} \frac{\text{kg}}{\text{m}\cdot\text{sec}} \quad (\text{Glg. 11a})$$

und $C_y = -42.9 \cdot 10^{-15} \frac{\text{N}\cdot\text{sec}}{\text{kg}\cdot\text{m}} \quad (\text{Glg. 11b})$

Die gravimagnetischen Kräfte auf die einzelnen Elemente des Kreisels stehen nach den Gleichungen 7a und 7b (in Analogie zur Lorentzkraft) senkrecht zu \vec{C} , also in der xz-Ebene. Sie werden wegen des Kreuzproduktes mit \vec{v} mit zunehmendem Abstand von der xz-Ebene immer kleiner, bis sie schließlich am obersten und untersten Punkt des Schwungrades gänzlich verschwinden. Der maximale Betrag der gravimagnetischen Kräfte ergibt sich für diejenigen Bestandteile des Kreisels, die sich genau in der xz-Ebene befinden mit

$$|\vec{F}| = m \cdot |\vec{v} \times \vec{C}| = m \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{C}| \cdot \sin(\alpha) = 5.39 \cdot 10^{-10} \text{ N} \quad (\text{Glg. 12})$$

und zwar pro Kilogramm bewegter Kreiselmasse

Die effektive Wirkung dieser Kraft auf jedes einzelne Stück des Kreisels ergibt sich als Kippmoment auf die z-Achse des Kreisels, wobei die Hebelarmlänge als Abstand des jeweiligen Kreisel- Abschnittes von der z-Achse berücksichtigt werden muß. Diese Berücksichtigung des

mechanischen Hebelarms führt zu einer erneuten Multiplikation der Kraft aus Gleichung 12 mit dem sinus des Winkels α entsprechend Gleichung 13.

$$|\vec{F}_{\text{eff}}| = |\vec{F}| \cdot \sin(\alpha) = m \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{C}| \cdot \sin^2(\alpha) \quad (\text{Glg. 13})$$

wieder pro Kilogramm bewegter Kreiselmasse.

Einsetzen der numerischen Werte unseres Beispiels führt uns zu Gleichung 14:

$$|\vec{F}_{\text{eff}}| = 5.39 \cdot 10^{-10} N \cdot \sin^2(\alpha) \quad (\text{Glg. 14})$$

Integration von $|\vec{F}_{\text{eff}}|$ über den Umfang des Kreisels liefert dann bei einer Gesamtmasse des Kreisels von 1000 kg eine Gesamtkraft von $|\vec{F}_{\text{ges}}| = 2.70 \cdot 10^{-6} N$ (Glg.15)

Dieses Kippmoment auf die Kreiselachse verursacht eine Präzessionsbewegung der Kreiselachse um die Richtung von \vec{r} mit der typischen Berechnung der Präzessionsfrequenz:

$$\omega_p = \frac{\text{Kippmoment}}{\text{Drehimpuls}} = \frac{M}{L} = \frac{2.70 \cdot 10^{-7} kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m}{2\pi \cdot 10^6 kg \cdot \frac{m}{s^2}} = 4.29 \cdot 10^{-14} \text{ sec}^{-1} \quad (\text{Glg.16})$$

Daß die Messung einer derart kleinen Präzessions-Winkelgeschwindigkeit höchste Anforderungen an das Experiment stellt, ist offensichtlich. Rechnet man die Winkelgeschwindigkeit von $4.29 \cdot 10^{-14} \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ in milli Bogensekunden pro Jahr (=marcsec/yr) um, so erhält man einen Wert von 278 marcsec/yr.

Voraussetzung für die Meßbarkeit des Effekts ist natürlich, daß der Kreisel derart gelagert wird, daß die Erde keine anderen Kräfte außer den gravimagnetischen auf den Kreisel überträgt. Um zu vermeiden, daß Corioliskräfte den Betrag der gravimagnetischen Kräfte um viele Zehnerpotenzen übersteigen, muß das Gyroskop in einem Satelliten gelagert werden. Leider nimmt die Frequenz der Thirring- Lense- Rotation (ω_p) mit dem Abstand zum Erdmittelpunkt in der dritten Potenz ab, sodaß aufgrund der Flughöhe des Satelliten die Frequenz ω_p deutlich geringer ist als an der Erdoberfläche. Desweiteren verläuft die Flugbahn des Satelliten nicht über dem Äquator sondern über Nord- und Südpol, was eine zusätzliche Verringerung der Frequenz ω_p nach sich zieht. Beim tatsächlich stattfindenden Gravity- Probe- B Experiment ergibt sich, wenn man die dort vorhandene Kugelform des Kreisels einsetzt (was rechnerisch mehr Aufwand macht als das einfache Schwungrad unseres Beispiels) sowie die zugehörige Rotationsfrequenz, eine zu erwartende Präzessionsfrequenz von nur noch 42 marcsec/yr. Der Ausgang des Experiments kann mit Spannung erwartet werden.

Danksagung:

Dem Mathematiker, Herrn Prof. Dr. K. Petras, danke ich für die außerordentliche Freundlichkeit, mit der er meine Integration nach Glg.5 bzw. Glg.8, die zu Abb. 4 geführt hat, kontrolliert hat.

Teil 4: Literaturhinweise:

- [ALE 71/81] Allgemeine Lehrbücher der Elektrodynamik (Standardwerke)
z.B. Bergmann-Schäfer: Lehrbuch der Experimentalphysik
Bd.2 Elektrizität und Magnetismus von H. Gobrecht
Verlag Walter de Gruyter 1971, ISBN 3-11-002090 0
oder Klassische Elektrodynamik von John David Jackson
Verlag Walter de Gruyter 1981, ISBN 3-11-007415-X
- [BUL 85] An introduction to the theory of seismology von K.E.Bullen und B.A.Bolt
Cambridge University Press, fourth edition, 1985
- [DIT 99] Die Gravitation im Test
von Hansjörg Dittus, Francis Everitt, Claus Lämmerzahl, Gerhard Schäfer
Physikalische Blätter, 55.Jahrgang, Heft 11, Nov.1999, S.39-46
- [GOE 96] Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie
von Hubert Goenner 1996 , ISBN 3-86025-333-6
Spektrum Akademischer Verlag
- [GPB 04] Gravity- Probe- B Experiment, Stanford- University, F. Everitt et. al.
am 17.Mai 2004 zu finden unter <http://einstein.stanford.edu/index.html>
- [HYP 00] HYPER Hyper-Precision Cold Atom Interferometry in Space , July 2000
Assessment Study Report der European Space Agency ESA-SCI(2000)10
Requests for additional copies: R.Reinhard: reinhard@so.estec.esa.nl
- [SCH 02] Gravitation von U. E. Schröder im Jahre 2002
Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch GmbH, ISBN 3-8171-1679-9
- [THI 18] Über die Wirkung rotierender ferner Massen in Einsteins Gravitationstheorie
von Thirring und Lense
Phys. Zeitschr. 19, Seiten 33-39 Jahrgang 1918