Ist die Vakuumenergiedichte des Universums elektrisch begründet ?

von Prof. Dr. Claus W. Turtur am 2.März.2004
Fachhochschule Braunschweig- Wolfenbüttel
Salzdahlumer Straße 46 / 48
38302 Wolfenbüttel
Tel.: 05331 / 939 - 3412
E-mail.: c-w.turtur@fh-wolfenbüttel.de

Zusammenfassung:

Einfache Handrechnungen zeigen einen überraschenden Zusammenhang zwischen der Energiedichte des Vakuums und der Größe des Universums. Das Ergebnis erklärt unter anderem auch die derzeit beobachtete Zunahme der Expansionsgeschwindigkeit des Universums.

Gliederung:

1. Die Fragestellung

In der Kosmologie wird die Zusammensetzung des Universums in etwas wie folgt abgeschätzt (vgl. [TEG 02]) :
- ca. 5 % bekannte Teilchen, also Materie, die wir als sichtbar bezeichnen
- ca. 30 % unsichtbare Materie, das sind z. Zt. noch nicht nachweisbare Teilchen
- ca. 65 % aus Vakuumenergie

Somit wird der größte Anteil der Energie des Universums dem Vakuum zugeschrieben. Nachgewiesen wurde diese Vakuumenergie anhand ihrer gravitativen Wirkung, da ihr aufgrund der Energie- Masse- Äquivalenz ($E=mc^2$) eine Masse zugeordnet werden kann. In der Theorie der Gravitation (d.h. in der Allgemeinen Relativitätstheorie) drückt sich diese Wirkung in der kosmologischen Konstanten Λ aus (siehe z.B. [GOE 96]). Im Experiment findet man ihre Wirkung in der Expansionsgeschwindigkeit des Universums (siehe z.B. [TON 03], [RIE 98]). Obwohl die Gravitation eigentlich zu einer Abnahme dieser Expansionsgeschwindigkeit führen sollte, beobachtet man in der Messung das Gegenteil. Eine mögliche Erklärung hierfür findet man im Verlauf des vorliegenden Artikels.
Noch immer diskutiert wird die Natur der Vakuum- Energie:
- Wie kommt diese Energie ins Vakuum?
- Woraus besteht sie ?
- Wie kann das Vakuum diese Energie speichern ?

Es liegt nahe, eine elektrische Ursache dieser Energie zu vermuten, immerhin ist auch die kosmische 2.7 K Hintergrundstrahlung elektromagnetischer Natur. Eine elektrische Ursache würde bedeuten, daß vom Urknall eine elektrische Ladung herrührt, die seit damals in unser gesamtes Universum hinein strömt.

In Anbetracht des Alters der Universums

$T_0 \approx (16 \pm 4) \cdot 10^9\, Jahre = (5.05 \pm 1.26) \cdot 10^{17}\,\sec.$ (siehe z.B. [PER 98], [RIE 98])

erfüllt die Ladung heute eine Kugel mit dem maximalen Durchmesser

$r_0 \approx c \cdot T_0 = (1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{26}\, m$ (wo c = Lichtgeschwindigkeit).

In diesem Sinne existiert eine Interpretation von r_0 als Durchmesser des Universums, den wir verstehen im Gegensatz zur unendlichen Ausdehnung des abstrakten mathematischen Raum $\mathbb{R}^3$.

Anmerkung: Der Durchmesser des Universums wird in verschiedenen Arbeiten unterschiedlich angegeben. Eine Auswertung des dynamischen Verhaltens des Universums liefert für gewöhnlich etwas niedrigere Werte als radiologische Datierungen. Der hier angegebene Wert mit seiner Messunsicherheit ist so vorsichtig abgeschätzt, daß praktische alle diese Werte innerhalb des genannten Intervalls liegen.

Die entscheidende Frage ist nun:

Wie groß muß eine mit Ladung erfüllte Kugel sein, damit die gravitative Anziehung die aus der Energie des elektrischen Feldes zu ebendieser Ladung resultiert, genauso groß ist, wie die abstoßende Coulomb- Wirkung dieser Ladung selbst ?

Nachfolgend werden wir sehen, daß diese Größe ziemlich genau die Größe unseres Universums ist, also eine Kugel mit dem Radius in der Nähe von r_0.

2. Die Energie der Felder

In diesem Abschnitt sollen die Energiebeträge des elektrischen Feldes und des Gravitationsfeldes einer Kugel mit Radius r_0 berechnet werden (vgl. [JAC 81]).

Beginnen wir mit der Einführung der Symbole:

ortsunabhängig, für das Universum:

ρ_M = Massendichte des Vakuums (=Universums) $\rightarrow$ Einheit: $[\rho_M] = \frac{kg}{m^3}$ (Zahlenwerte folgen später)

ρ_L = Ladungsdichte des Vakuums (=Universums) $\rightarrow$ Einheit: $[\rho_L] = \frac{C}{m^3}$

ρ_U = Energiedichte des Vakuums (=Universums) $\rightarrow$ $\rho_U = \rho_M \cdot c^2$, Einheit: $[\rho_U] = \frac{J}{m^3}$

W_{elek} = Gesamtenergie des elektrischen Feldes der Kugel , Einheit: $[W_{elek}] = J$

W_{grav} = Gesamtenergie des Gravitationsfeldes der Kugel , Einheit: $[W_{grav}] = J$

ortsabhängig: Einheiten:

ρ_{elek} = lokale Energiedichte des elektrischen Feldes $\vec{E}$ $\rightarrow$ $\rho_{elek} = \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot |\vec{E}|^2$ und $[\rho_{elek}] = \frac{J}{m^3}$

ρ_{grav} = lokale Energiedichte des Gravitationsfeldes $\vec{G}$ $\rightarrow$ $\rho_{grav} = \frac{1}{8\pi\gamma} \cdot |\vec{G}|^2$ und $[\rho_{grav}] = \frac{J}{m^3}$

mit $\varepsilon_0 = 8.859 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{J \cdot m}$ und $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$ (Gleichungen 1a und 1b)

Fassen wir nun das Gravitationsfeld in einen mathematischen Ausdruck und berechnen anschließend seine Energiedichte, bzw. die Energie einer Kugel von Radius r_0.
Da wir den Verlauf des Gravitationsfelder einer Kugel mit homogener Massenverteilung seit Isaac Newton kennen (siehe Abb.1), ist die Angabe der Feldstärke kein Problem (siehe Gleichung 2):

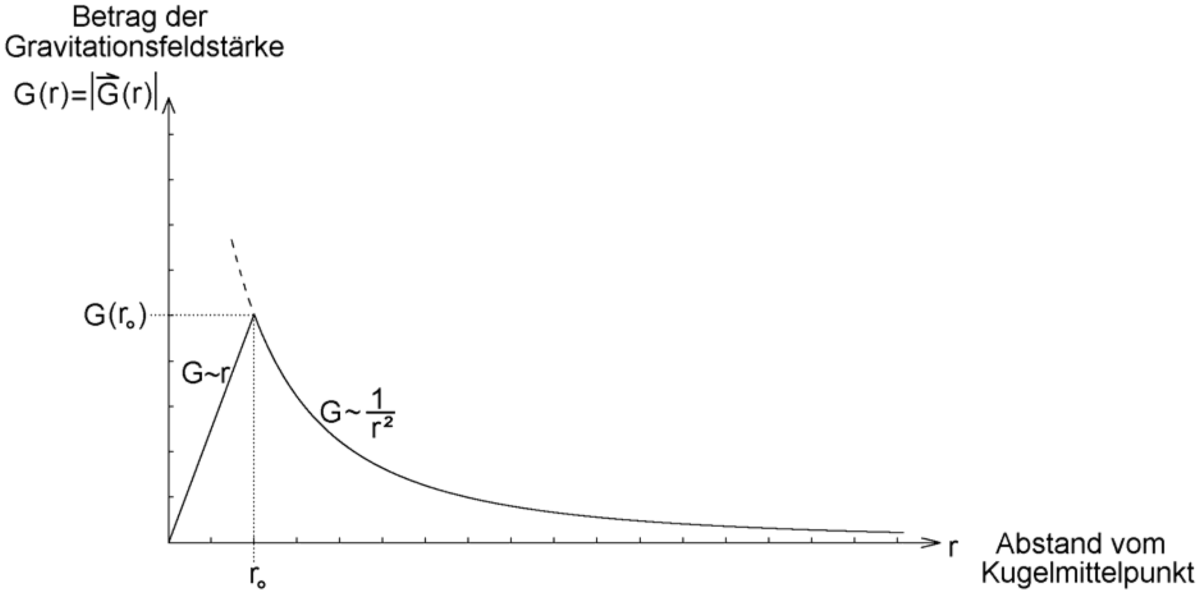

Abb.1: Betrag der Gravitationsfeldstärke einer homogenen Kugel mit Durchmesser r_0 .

Die im Kugelvolumen enthaltene Masse beträgt $m = \rho_M \cdot V = \rho_M \cdot \frac{4\pi}{3} r_0^3$

Damit ist der Betrag der Gravitationsfeldstärke beim Abstand r_0 : $G(r_0) = \gamma \frac{\rho_M \cdot V}{r_0^2} = \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_M r_0$

Für den gesamten Verlauf des Gravitationsfeldes als Funktion von r folgt also:

$$G(r) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_M r & \text{für } 0 \leq r \leq r_0 \\ \frac{4\pi}{3} \gamma \rho_M \cdot \frac{r_0^3}{r^2} & \text{für } r \geq r_0 \end{cases}$$

(Gleichung 2)

Da es im Universum keine ausgezeichnete Richtung gibt, arbeiten wir mit Kugelkoordinaten r, ϑ, φ , wobei der Betrag der Gravitationsfeldstärke von ϑ und φ unabhängig ist.

Die lokale Energiedichte des Gravitationsfeldes als Funktion des Mittelpunktsabstandes "r" folgt nun aus den Gleichungen 1b und 2:

$$\rho_{grav} = \frac{1}{8\pi\gamma}\cdot\left|\vec{G}\right|^2 = \frac{1}{8\pi\gamma}\cdot\begin{cases} \frac{16\pi^2}{9}\gamma^2\rho_M^2 r^2 & \text{für } 0 \leq r \leq r_o \\ \frac{16\pi^2}{9}\gamma^2\rho_M^2\cdot\frac{r_o^6}{r^4} & \text{für } r \geq r_o \end{cases} = \frac{2\pi}{9}\gamma\rho_M^2\cdot\begin{cases} r^2 & \text{für } 0 \leq r \leq r_o \\ \frac{r_o^6}{r^4} & \text{für } r \geq r_o \end{cases} \quad \text{(Gleichung 3)}$$

Die Gesamtenergie des gesamten Feldes der Kugel berechnet man dann wie gewohnt, indem man die Energiedichte über den gesamten Raum des $\mathbb{R}^3$ integriert.

$$W_{grav} = \int_{\mathbb{R}^3} \rho_{grav}\, dV = \frac{2\pi}{9}\gamma\rho_M^2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_o} r^2\cdot r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi + \frac{2\pi}{9}\gamma\rho_M^2\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_o}^{\infty}\frac{r_o^6}{r^4}\cdot r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Die Integration über ϑ und φ liefert nur einen konstanten Faktor 4π

$$= \frac{2\pi}{9}\gamma\rho_M^2\cdot 4\pi\int_0^{r_o} r^4\, dr + \frac{2\pi}{9}\gamma\rho_M^2\cdot 4\pi\cdot\int_{r_o}^{\infty}\frac{r_o^6}{r^4}\, dr = \frac{16}{15}\pi^2\gamma\rho_M^2\cdot r_o^5 \quad \text{(Gleichung 4)}$$

Damit ist die Gravitationsenergie der Kugel berechnet.
Es folgt die Berechnung der elektrischen Energie der Kugel, die im Prinzip völlig analog verläuft, da die Kugel eine homogene Ladungsverteilung aufweisen soll:

Die gesamte Ladung der Kugel beläuft sich auf: $Q = \int_{\mathbb{R}^3}\rho_L\, dV$ (Gleichung 5)

Das elektrische Feld am Ort $\vec{x}$ (mit Ladung am Ort $\vec{x}'$) ist dann: $\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\int_{\text{Kugel}}\rho_L\frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, d^3x'$

Wegen der homogen im Inneren einer Kugel verteilten Ladung, können wir wieder sagen:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{r}{r_o^3} & \text{für } 0 \leq r \leq r_o \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{r^2} & \text{für } r \geq r_o \end{cases} \Longrightarrow \vec{E} = \frac{\rho_L}{3\varepsilon_o}\cdot\begin{cases} r & \text{für } 0 \leq r \leq r_o \\ \frac{r_o^3}{r^2} & \text{für } r \geq r_o \end{cases} \quad \text{(Gleichung 6)}$$

Wegen $\rho_{elek} = \frac{\varepsilon_o}{2}\cdot\left|\vec{E}\right|^2$ folgt nun im Falle des elektrischen Feldes:

$$W_{elek} = \int_{\mathbb{R}^3}\rho_{elek}\, dV = \frac{\varepsilon_o}{2}\cdot\frac{\rho_L^2}{9\varepsilon_o^2}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r_o} r^2\cdot r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi + \frac{\varepsilon_o}{2}\cdot\frac{\rho_L^2}{9\varepsilon_o^2}\cdot\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{r_o}^{\infty}\frac{r_o^6}{r^4}\cdot r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

Die Integration verläuft analog wie im Falle der Gravitation

$$= \frac{\rho_L^2}{18\varepsilon_o}\cdot 4\pi\int_0^{r_o} r^4\, dr + \frac{\rho_L^2}{18\varepsilon_o}\cdot 4\pi\cdot\int_{r_o}^{\infty}\frac{r_o^6}{r^4}\, dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_o}\cdot\rho_L^2\cdot r_o^5 \quad \text{(Gleichung 7)}$$

Damit sind die Energien der Felder aus der Kugel berechnet. Diese sind auch bekannt unter dem Namen Selbstenergie. Hier wurden nur die Absolutbeträge dieser Energien berechnet. Man beachte aber auch ihre Vorzeichen. Die Gravitationskraft wirkt attraktiv, die Coulombkraft repulsiv, d.h. bei Überwiegen der elektrischen Kraft expandiert die Kugel, bei Überwiegen der Gravitationskraft hingegen schrumpft sie.

Wenn wir aber die Gleichgewichtsposition bestimmen wollen, dann müssen wir noch Gleichung 4 und Gleichung 7 aneinander anpassen, denn sie enthalten mit der Ladungsdichte ρ_L und der Massendichte ρ_M völlig unterschiedliche Größen zur Dichteangabe. Glücklicherweise läßt sich aber der Zusammenhang zwischen dieser beiden Dichten herstellen, weil nämlich die ponderable Masse nichts weiter ist, als die nach der Energie- Masse- Äquialenz ($W=mc^2$) zu berechnende Energie, die in der Ladung des Coulombfeldes steckt. Deshalb verläuft die Umrechnung wie folgt:

Die Masse ist $M = W_{elek} \cdot c^2 \quad \Longrightarrow \quad$ Die Massendichte ist $\rho_M = \frac{M}{V} = \frac{W_{elek}}{V \cdot c^2}$

Mit Gleichung 7 folgt daraus
$$\rho_M = \frac{\frac{4\pi}{15\varepsilon_o} \cdot \rho_L^2 \cdot r_o^5}{\frac{4\pi}{3} r_o^3 \cdot c^2} = \frac{\rho_L^2 \cdot r_o^5}{5\varepsilon_o \cdot r_o^3 \cdot c^2} \Longrightarrow \rho_L^2 \cdot r_o^5 = \rho_M \cdot 5\varepsilon_o \cdot r_o^3 \cdot c^2 \qquad \text{(Gleichung 8a)}$$

Nochmals Glg.7 liefert die gesuchte Umrechnung
$$\Longrightarrow W_{elek} = \frac{4\pi}{15\varepsilon_o} \cdot \rho_L^2 \cdot r_o^5 = \frac{4\pi}{15\varepsilon_o} \cdot \rho_M \cdot 5\varepsilon_o \cdot r_o^3 \cdot c^2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \rho_M \cdot c^2 \cdot r_o^3 \qquad \text{(Gleichung 8b)}$$

Mit den Gleichungen 7 und 8b wurden nun elektrische und gravitatorische Feldenergie vergleichbar gemacht. Den Vergleich wollen wir im nächsten Kapitel ziehen.

3. Energiedichte und Größe des Universums.

Durch Summation der elektrischen und der gravitatorischen Energie läßt sich die Gesamtenergie berechnen - siehe Gleichung 9. Man muß dabei den einzelnen Summanden aus den Gleichungen 4 und 8b das richtige Vorzeichen hinzufügen: Gravitationskräfte sind anziehend, sodaß die zugehörige Selbstenergie ein negatives Vorzeichen erhält, im Gegensatz zu abstoßenden Coulomb- Kraft, deren Selbstenergie folglich ein positives Vorzeichen erhält.

$$W_{ges} = W_{elek} - W_{grav} = \frac{4\pi}{3} \cdot \rho_M \cdot c^2 \cdot r_o^3 - \frac{16}{15} \pi^2 \gamma \rho_M^2 \cdot r_o^5 \qquad \text{(Gleichung 9)}$$

Die Lage des Gleichgewichtszustandes findet sich im Energieminimum:

$$\frac{d}{dr} W_{ges} = 4\pi \cdot \rho_M \cdot c^2 \cdot r_o^2 - \frac{16}{3} \pi^2 \gamma \rho_M^2 \cdot r_o^4 = 0$$

(Nur die positive Wurzel hat physikalischen Sinn.)

Auflösen nach $r_o \quad \Longrightarrow \quad r_o = \pm\sqrt{\frac{3c^2}{4\pi\gamma\rho_M}} = (1.8 \pm 0.3) \cdot 10^{26}\,\text{m} = (19 \pm 3) \cdot 10^9$ Lichtjahre (Gleichung 10)

bei einer Vakuum- Energiedichte von $\rho_M = (1.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-26} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ (Begründung folgt)

Zum Wert der Vakuumenergiedichte:
Bei [GIU 00] findet man einen Hinweis auf $\rho_M \approx 10^{-26}\,\frac{kg}{m^3}$.
Bei [TEG 02] (auf seiner S.3) findet man eine theoretische begründete "Vacuum density constant" von $\rho_M \approx 1.15 \cdot 10^{-26}\,\frac{kg}{m^3}$ und daneben eine meßtechnisch erhaltene "Matter density" von $\rho_M \approx 0.75 \cdot 10^{-26}\,\frac{kg}{m^3}$. Andere Quellen geben auch Werte für ρ_M an, die z.Teil auch ein wenig weiter schwanken, eher etwas zu größeren Werten. Aus diesem Grunde scheint ein gerundeter Wert mit einer Nachkommastelle von

$$\rho_M \approx (1.0 \pm 0.3) \cdot 10^{-26}\,\frac{kg}{m^3} \qquad \text{(Gleichung 11)}$$

als weitaus hinreichend. Die Fehlerangabe mag etwas optimistisch geschätzt sein.
Die Fehlerrechnung bei der Angabe der Unsicherheit von r_0 in Gleichung 10 ist wie eine Gauß'sche Fehlerfortpflanzung durchgeführt allerdings mit nur einer fehlerbehafteten Variablen ρ_M .

Da das gemessene Alter des Universums innerhalb der Unsicherheitsgrenzen mit dem Wert aus Gleichung 10 übereinstimmt, kann man sagen:
Hier wurde anhand eines einfachen Modells der Durchmesser (und damit das Alter) des Universums auf die Energiedichte des Vakuums zurückgeführt. Das Ergebnis paßt erstaunlich gut zu den sonst bekannten (und in Kapitel 1 genannten) Werten der Literatur.

Umgekehrt könnte man Gleichung 10 auch nach ρ_M auflösen und mit $r_0 \approx (1.5 \pm 0.4) \cdot 10^{26}\,m$ den Durchmesser des Universums (siehe Kapitel 1) einsetzen. Dann bekommt man:

$$\rho_M = \frac{3c^2}{4\pi\gamma r_0^2} = (1.43 \pm 0.76) \cdot 10^{-26}\,\frac{kg}{m^3} \qquad \text{(Gleichung 12)}$$

Die Fehlerrechnung ist wieder als Gauß'sche Fehlerfortpflanzung mit einer fehlerbehafteten Variablen durchgeführt (jetzt r_0). Die Fehlerangabe ist weniger optimistisch als bei Gleichung 11, kann aber durchaus realistisch sein.

Dies ist sicherlich eine vernünftige Angabe für die Energiedichte des Universums, zu deren Berechnung die einzige Voraussetzung das Alter des Universums ist.

Interessehalber sei nachfolgend noch kurz die Ladungsdichte des Universums, somit also die Ladungsdichte des Vakuums ausgerechnet. Für ρ_M und r_0 seien die Werte und Unsicherheiten nach Gleichung 10 eingesetzt:

Aus Gleichung 8a folgt $$\rho_L = \sqrt{\rho_M \cdot 5\varepsilon_0 \cdot c^2} \cdot \frac{1}{r_0} = (1.11 \pm 0.38) \cdot 10^{-36}\,\frac{C}{m^3} \qquad \text{(Gleichung 13)}$$

Dieser Wert erscheint zwar im Hinblick auf eine technische Nutzbarmachung nicht all zu hoch - aber vielleicht könnte gerade eben die elektrische Ladungsdichte des Vakuums eines Tages den Weg zu technischen Nutzung bieten ?

Zum Abschluß der Arbeit seien noch einige Bemerkungen erwähnt, deren Relevanz man möglicherweise noch im Hinterkopf behalten sollte:

(a.) Bei den Berechnungen wurde die Homogenität des Universums vorausgesetzt, d.h. es wurde angenommen, daß das Vakuum überall im Universum gleich sei. Diese Voraussetzung kann man anzweifeln, wie [GIU 00] das tut. Ein Grund dafür könnte sein, daß sich unterschiedliche Bestandteile des Universums mit unterschiedlicher Geschwindigkeit vom Punkt des Urknalls aus in den Raum bewegt haben könnten. In diesem Fall würde sich nicht das Modell ändern, sondern nur die Integrationen in den Gleichungen 4 und 7.

(b.) In den hier gezeigten ersten Ansätzen zum Modell werden nur die Gravitationskraft und die Coulombkraft berücksichtigt. Im Prinzip ist aber auch eine Erweiterung des Verfahrens auf die Kräfte aller fundamentalen Wechselwirkungen möglich, d.h. in eine erweiterte Berechnung könnte man auch noch die Felder der schwachen und der starken Wechselwirkung einbeziehen. Vermutlich sollte diesen beiden Wechselwirkungen allerdings eine untergeordnete Rolle zukommen, denn sie haben nur eine geringe Reichweite und entstehen daher nur im allernächsten Umfeld von ruhemassebehafteten Teilchen. Daß sie auch im Mittel über das gesamte Universum nicht den dominanten Energiebetrag ausmachen, sieht man schon an der eingangs erwähnten prozentualen Verteilung der Energie im Universum.
Möglicherweise erklärt sich aber aus den kleinen Beiträgen der starken und der schwachen Wechselwirkung gerade der kleine Unterschied zwischen den Werten der Vakuum- Massendichte von Gleichung 11 und Gleichung 12, bzw. der kleine Unterschied in den Werten der Größe bzw. des Alters des Universums zwischen Kapitel 1 und Gleichung 10.

(c.) Erklärt nun das hier vorgestellt Modell die Zunahme oder die Abnahme der Expansionsgeschwindigkeit des Universums ? BEIDES !
Der Punkt ist nämlich der: Berechnet wurde ein Kräftegleichgewicht zwischen elektrischer Abstoßung und gravitatorischer Anziehung. Nicht berücksichtigt wurden Massenträgheiten.
Nimmt man nämlich an, daß im Moment des Urknalls die Expansionsgeschwindigkeit extrem groß war, weil die elektrische Abstoßung sehr stark dominiert hat, so bewegt sich das Universum dem Energieminimum zunächst entgegen, dessen Lage wir soeben berechnet haben. Nun könnte aufgrund der Massenträgheit des Systems eine Schwingung um ebendieses Energieminimum entstehen, die im ungedämpften Falle wieder zum Ausgangspunkt zurückschwingt, im gedämpften Falle hingegen mit abklingender Amplitude um den Gleichgewichtszustand herum oszilliert. Für letzteren Fall spräche die Tatsache, daß wir uns jetzt, viele Milliarden Jahre nach dem Urknall in der Nähe dieses Gleichgewichtszustandes befinden. Oszilliert das Universum um diesen Gleichgewichtszustand herum, so wird es im Laufe der Jahrmilliarden immer wieder wechselweise ein wenig expandieren und kontrahieren - was die kosmologischen Messungen erklären würde. Neben der gedämpften und ungedämpften Schwingung könnte man sich im Universum auch exotherme Vorgänge vorstellen, die zu einer Anregung der Schwingung führen, was aber nichts am prinzipiellen Stattfinden der Oszillation

um eine Ruhelageposition ändert. In diesem Falle wäre ebenso wie bei der ungedämpften Schwingung eines Tages ein Kollaps des Universums möglich.

Aus dem Ergebnis kann man dann auch die kosmologische Konstante Λ berechnen, mit all ihren Konsequenzen für das Bild des Universums. Es gilt:

$$\rho = \frac{c^2\Lambda}{8\pi\gamma} \qquad \Rightarrow \qquad \Lambda = \rho \cdot \frac{8\pi\gamma}{c^2} = (2.6 \pm 1.4) \cdot 10^{-56}\,cm^{-2}$$

Literturhinweise:

[GIU 00] Das Rätsel der kosmologischen Vakuumenergiedichte und die beschleunigte Expansion des Universums
Domenico Giulini und Norbert Straumann
arXiv:astro-ph/0009368 v1 22 Sep 2000

[GOE 96] Einführung in die Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie
Hubert Goenner, Spektrum Akademischer Verlag 1996
ISBN 3-86025-333-6

[JAC 81] Klassische Elektrodynamik , John David Jackson,
Walter de Gruyter Verlag 1981 , ISBN 3-11-007415-X

[PER 98] Measurements of Ω and Λ from 42 high-redshift Supernovae
S.Perlmutter, et. al., arXiv:astro-ph/9812133, 8. Dez. 1998

[RIE 98] Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant
Adam G.Riess, et. al., arXiv:astro-ph/9805201

[TEG 02] Measuring Spacetime: from Big Bang to Black Holes
Max Tegmark, arXiv:astro-ph/0207199 v1 10 Jul 2002
Slightly abbreviated version in: Science, 296, 1427-1433 (2002)

[TON 03] Cosmological Results from High-z Supernovae
John L. Tonry, et. al., arXiv:astro-ph/0305008, 1. Mai 2003