Zwei Paradoxa zur Existenz magnetischer Felder

Wolfenbüttel, 14. Dez. 2007

Claus W. Turtur, Fachhochschule Braunschweig-Wolfenbüttel

Zusammenfassung

Ein Gedankenexperiment wird betrachtet, in welchem ein Beobachter eine elektrische Ladung sieht, die sich mit konstanter Geschwindigkeit relativ zu demjenigen Bezugssystem bewegt, in dem der Beobachter ruht. Außerdem sollen keine elektrischen und keine magnetischen Felder auf die sich bewegende Ladung wirken, sodaß diese keine Kräfte erfährt und infolgedessen ihre konstante Geschwindigkeit beibehält.
Aber die sich bewegende Ladung erzeugt in dem Bezugssystem des Beobachters selbst ein Magnetfeld. Da die sich bewegende Ladung ihre Geschwindigkeit als Funktion der Zeit nicht ändert, und damit auch nicht ihre Energie, kann sie keine Leistung abstrahlen. Aber das aufgrund ihrer Bewegung erzeugt magnetische Feld enthält Energie, und man kann auch die Leistung ausrechnen, die mit diesem Feld abgestrahlt wird. Die Berechnung zeigt, dass diese Leistung noch nicht einmal zeitlich konstant ist. Die Existenz dieser Energie und ebenso die Änderung der Leistung verstehen wir als ein erstes Paradoxon des Magnetfeldes.
Verfolgt man weiterhin ein wohlbestimmtes Volumenelement abgestrahlter Feldenergie, so zeigt eine Berechnung, dass diese Feldenergie beim bloßen Laufen des Volumenelements durch den Raum als Funktion der Zeit abnimmt. Dieser unerklärte Verlust an Energie kann als zweites Paradoxon des Magnetfeldes verstanden werden.

Vorbemerkung

Die beiden hier vorgestellten Paradoxa magnetischer Felder zeigen eine gewisse Ähnlichkeit zu zwei Paradoxa der Existenz elektrischer Ladungen und Felder, auf die der Autor in [1] aufmerksam gemacht hat.

Gliederung

Das erste Paradoxon des Magnetfeldes wird erklärt anhand der drei Abschnitte:
(1.) Berechnung der Feldstärke des Magnetfeldes der bewegten Ladung
(2.) Ausbreitung des Magnetfeldes bzw. dessen Energie durch den Raum
(3.) Berechnung der emittierten Leistung

Das zweite Paradoxon des Magnetfeldes wird erklärt anhand des vierten Abschnitts:
(4.) Verfolgen der in einem Zylindervolumen enthaltenen Energie bei seiner Ausbreitung durch den Raum

Inhalt

(1.) Berechnung der Feldstärke des Magnetfeldes der bewegten Ladung

Wir wollen das folgende Beispiel durchrechnen: Die bewegte elektrische Ladung, die ein Magnetfeld erzeugt, sei in ihrer geometrischen Anordnung homogen entlang der z-Achse verteilt, und diese gerade Linie, die die Ladung trägt, soll unendlich lang sein und sich gleichförmig (also mit konstanter Geschwindigkeit) in z-Richtung bewegen, entsprechend der Veranschaulichung in Abb.1. Den Betrag der magnetischen Feldstärke $\left|\vec{H}\right|$ finden wir in den üblichen Standardlehrbüchern für Studierende, z.B. [2], [3] mit

$$\left|\vec{H}\right| = \frac{I}{2\pi r} \qquad \text{mit } I = \text{elektrischer Strom und } r = \sqrt{x^2 + y^2}\ . \tag{1}$$

Die zugehörige Energiedichte finden wir in den selben Büchern gemäß

$$u = \frac{\mu_0}{2} \cdot \left| \vec{H} \right|^2 \tag{2}$$

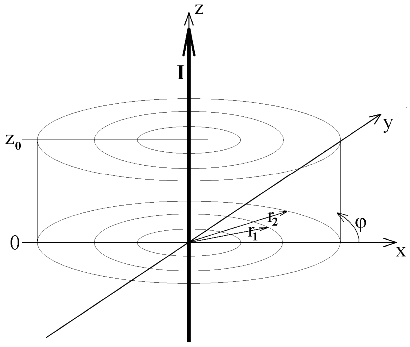

Abb. 1:
Veranschaulichung der besprochenen Ladungskonfiguration einer bewegten elektrischen Ladung, die das selbe Magnetfeld erzeugt wie ein unendlich langer gerader Leiter. Bei Ausrichtung des Stromflusses in z-Richtung kann der Betrag der magnetischen Feldstärke bequem in Zylinderkoordinaten angegeben nach (1) werden.

(2.) Ausbreitung des Magnetfeldes bzw. dessen Energie durch den Raum
Die Energie des emittierten Magnetfeldes wandert, ausgehend von der Position der Ladung (also von der z-Achse) mit Lichtgeschwindigkeit in radialer Richtung von ihrer Ursache, also von der bewegten Ladung weg.
Der Grund, warum wir die Ausbreitung der Feldenergie als zylinderförmig und nicht als kugelförmig behandeln, wie das bei der Ausbreitung des elektrischen Feldes einer Punktladung in [1] geschehen war, liegt in der Tatsache, dass bei der hier betrachteten Anordnung Zylindersymmetrie vorliegt – im Gegensatz zur Kugelsymmetrie des von einer Punktladung emittierten elektrischen Feldes. Greifen wir nämlich ein Volumenelement in Form eines Zylinder mit endlicher Länge $z = 0 \ldots z_0$ heraus (siehe Abb.1), so wird durch dessen Boden- und Deckelfläche gleich viel Energie einströmen wie ausströmen, da das zylindrische Volumenelement selbst weder eine Quelle noch eine Senke darstellt. In gleicher Weise versteht man auch, dass von der bewegten Ladung (an der Position der z-Achse) die Energie zylindersymmetrisch nach außen (also in radialer Richtung in der xy-Ebene) strömt.

Nun wollen wir herausfinden, wie viel magnetische Feldenergie im Ablauf eines Zeitintervalls Δt in den Raum fließt. Dafür legen wir die folgende Zeitskala fest: Der elektrische Strom (also die Bewegung der Ladung) werde zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ eingeschaltet. Der Zeitpunkt t_1 (mit $t_1 > 0$) wird als derjenige Moment festgelegt, in dem das magnetische Feld aufgrund seiner endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit (nämlich der Lichtgeschwindigkeit) den Radius r_1 erreicht. Noch etwas später, nämlich zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ (mit $\Delta t > 0$), wird das Feld den Zylinder mit dem Radius r_2 erreicht haben. Infolgedessen läßt sich die Energie des Magnetfeldes, die im Verlauf des Zeitintervalls Δt emittiert wurde, als diejenige Energie berechnen, die die Zylinderschale mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 ausfüllt. Wir berechnen diesen Energiebetrag durch Integration der Energiedichte über das Volumen der besagten Zylinderschale und setzen dabei die Energiedichte nach Gleichung (2) und dort den Betrag der magnetischen Feldstärke nach Gleichung (1) ein:

$$W = \iiint\limits_{(\text{Zylinder})} u \, dV = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \int\limits_{z=0}^{z_0} \frac{\mu_0}{2} \cdot \left| \vec{H} \right|^2 \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \int\limits_{z=0}^{z_0} \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I^2}{(2\pi r)^2} \cdot r \, dz \, dr \, d\varphi$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \int\limits_{z=0}^{z_0} \frac{\mu_0 \cdot I^2}{8\pi^2 r} dz \, dr \, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 \cdot I^2}{8\pi^2 r} \cdot [z]_0^{z_0} \, dr \, d\varphi = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I^2 z_0}{8\pi^2 r} dr \, d\varphi$$

$$= \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 I^2 z_0}{8\pi^2} \cdot \left(\ln(r_2) - \ln(r_2) \right) d\varphi = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{8\pi^2} \cdot \left(\ln(r_2) - \ln(r_2) \right) \cdot 2\pi$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{\mu_0 \, I^2 \, z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \tag{3}$$

Das Zeitintervall Δt, in welchem diese Energie emittiert wurde, kann dann auf die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Magnetfeldes zurückgeführt werden. Dass es sich dabei um die Lichtgeschwindigkeit handelt, ist von der Erklärung des Funktionsmechanismus des Hertz'schen Dipolstrahlers her bekannt [4], wonach auch einleuchtet, dass sich magnetische Felder mit der selben Geschwindigkeit ausbreiten müssen wir elektrische Felder. Deshalb berechnen wir das Zeitintervall Δt wie folgt:

$$c = \frac{r_2 - r_1}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta t = \frac{r_2 - r_1}{c} \tag{4}$$

Damit können wir angeben, zu welchen Zeitpunkten die Radien r_1 und r_2 erreicht werden:

$$c = \frac{r_1}{t_1} \quad \Rightarrow \quad r_1 = c \cdot t_1 \tag{5}$$

und $r_2 = c \cdot t_2 = c \cdot (t_1 + \Delta t)$ (6)

(3.) Berechnung der emittierten Leistung

Aus Gleichung (3) kennen wir die innerhalb des Zeitintervalls Δt emittierte Energie. Division dieses Energiebetrags durch die zu dessen Emission benötigte Dauer Δt (entsprechend Gleichung (4)) liefert die gesuchte Leistung gemäß

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\mu_0 \, I^2 \, z_0}{4\pi \cdot \Delta t} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) . \tag{7}$$

Um herauszufinden, ob diese Leistung P wirklich zeitlich konstant ist (wie man es erwarten sollte, da die Bewegungsgeschwindigkeit der Ladung zeitlich konstant ist), drücken wir die Radien r_1 und r_2 als Funktion der Zeit aus, und zwar unter Benutzung der Gleichungen (5), (6) und (7):

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{\mu_0 \, I^2 \, z_0}{4\pi \cdot \Delta t} \cdot \ln\left(\frac{c \cdot (t_1 + \Delta t)}{c \cdot t_1}\right) = \frac{\mu_0 \, I^2 \, z_0}{4\pi} \cdot \frac{1}{\Delta t} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t_1}\right) \tag{8}$$

Es ist offensichtlich, dass dieser Ausdruck nicht zeitlich konstant ist. Er wäre zeitlich konstant, wenn er nicht von t_1, also dem Moment der Beobachtung, abhinge. Damit erklärt sich das erste eingangs genannte Paradoxon des Magnetfeldes: Die bewegte Ladung erzeugt ein Magnetfeld und strahlt somit Leistung ab, obwohl sie selbst ihre Geschwindigkeit und somit ihre Energie beibehält. Das Paradoxon liegt also in der Tatsache, dass wir die Herkunft dieser Energie und der zugehörigen Leistung nicht sehen.

Aber dieser erste Teil des Paradoxon des Magnetfeldes hat noch einen weiteren Aspekt: Die abgestrahlte Leistung ist offensichtlich nicht zeitlich konstant, obwohl es keinen ersichtlichen Hinweis auf eine Änderung der emittierten Feldstärken gibt.

Wenden wir uns nun dem zweiten Paradoxon zu:

(4.) Verfolgen der in einem Zylindervolumen enthaltenen Energie bei seiner Ausbreitung durch den Raum

Nun stellen wir die Frage, ob sich die in einem gegebenen Zylinder enthaltene Energie bei dessen Lauf durch den Raum ändert. Zu diesem Zweck folgen wir der beobachteten Zylinderschale mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2 noch über ein weiteres Zeitintervall $\Delta t_x > 0$. Innerhalb dieser Zeitspanne wird sich der Innenradius der bewussten Zylinderschale auf $r_3 = r_1 + c \cdot \Delta t_x$ vergrößert haben und der Außenradius auf $r_4 = r_2 + c \cdot \Delta t_x$. Damit stehen wir folgender Entwicklung der Situation im Laufe der Zeit gegenüber:

▪ Zum Zeitpunkt $t_2 = t_1 + \Delta t$ hatte unsere Zylinderschale den Innenradius r_1 und den Außenradius r_2, d.h. wir betrachten die selbe Zylinderschale wie in den Abschnitten 1…3.
▪ Zum Zeitpunkt $t_2 + \Delta t_x = t_1 + \Delta t + \Delta t_x$ habe sich ebendieser Zylinder von $r_1 \ldots r_2$ soweit radial ausgedehnt, dass er nun mit seinem Innenradius bei r_3 angekommen ist und mit seinem Außenradius bei r_4.

Die in den beiden genannten Vergleichsaugenblicken im Zylinder enthaltene Energie läßt sich nach Gleichung (3) angeben:

▪ Bei $t_2 = t_1 + \Delta t$ enthält er die Energie $W_{12} = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$.

▪ Bei $t_2 + \Delta t_x = t_1 + \Delta t + \Delta t_x$ enthält er die Energie

$$W_{34} = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2 + c \cdot \Delta t_x}{r_1 + c \cdot \Delta t_x}\right).$$

Wollen wir das zeitliche Verhalten verstehen, so setzen wir r_1 und r_2 nach den Gleichungen (5) und (6) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}\text{Bei } t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow W_{12} &= \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{c \cdot (t_1 + \Delta t)}{c \cdot t_1}\right) \\ &= \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{t_1 + \Delta t}{t_1}\right) = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t_1}\right)\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}&\text{Bei } t_2 + \Delta t_x = t_1 + \Delta t_x + \Delta t \Rightarrow W_{34} = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_4}{r_3}\right) = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{r_2 + c \cdot \Delta t_x}{r_1 + c \cdot \Delta t_x}\right) \\ &\Rightarrow W_{34} = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{c \cdot (t_1 + \Delta t) + c \cdot \Delta t_x}{c \cdot t_1 + c \cdot \Delta t_x}\right) = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(\frac{t_1 + \Delta t + \Delta t_x}{t_1 + \Delta t_x}\right) = \frac{\mu_0 I^2 z_0}{4\pi} \cdot \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t_1 + \Delta t_x}\right)\end{aligned} \tag{10}$$

Daß die beiden Ausdrücke (9) und (10) unterschiedlich sind, ist offensichtlich. Aber wir haben nur die Energie im Inneren eines expandierenden Zylinders verfolgt und erwarten daher eigentlich, dass $W_{12} = W_{34}$ sein sollte. Demgegenüber zeigt unsere Berechnung aber, dass wegen $\Delta t_x > 0$ die Relation $1 + \frac{\Delta t}{t_1} > 1 + \frac{\Delta t}{t_1 + \Delta t_x}$ gelten muß, und somit folgt:

$$\Rightarrow \quad \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t_1}\right) > \ln\left(1 + \frac{\Delta t}{t_1 + \Delta t_x}\right).$$

In Anbetracht der Gleichungen (9) und (10) haben wir also gefunden: $W_{12} > W_{34}$.

Das Volumenelement hat also bei seinem Lauf durch Raum Feldenergie verloren, bzw. diese nach irgendwohin abgegeben. Dieser unerklärte Verlust an Energie beschreibt ein zweites Paradoxon des Magnetfeldes, denn unserer Betrachtung lag ein statisches Magnetfeld zugrunde, also ein Magnetfeld, welches an jedem Ort, den es nach seinem Einschalten bereits erreicht hat, konstant bleibt, ebenso wie sich auch die Geschwindigkeit der felderzeugenden Ladungen ab dem Moment t_0 des Einschaltens des Stromes nicht mehr ändert.

Die sich aus den beiden Paradoxa ergebende und noch ungeklärte Frage ist also die: Woher stammt bei der Entstehung des Magnetfeldes die Feldenergie, und wohin geht diese Feldenergie verloren, wenn sich das Feld im Raum ausbreitet ?

Literaturhinweise

[1] Two Paradoxes of the Existence of electric Charge
Claus W. Turtur, arXiv:physics/0710.3253v1 (Okt.2007)

[2] Klassische Elektrodynamik
John David Jackson, Walter de Gruyter Verlag, 1981, ISBN 3-11-007415-X

[3] Physik
Douglas C. Giancoli, Pearson Studium (2006), ISBN-13: 978-3-8273-7157-7

[4] Bergmann Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Band 2
Heinrich Gobrecht et.al., Walter de Gruyter Verlag, 1971, ISBN 3-11-002090-0

Adresse des Autors:

Prof. Dr. Claus W. Turtur
Fachhochschule Braunschweig-Wolfenbüttel
Salzdahlumer Strasse 46 / 48
Germany – 38302 Wolfenbüttel
Email: c-w.turtur@fh-wolfenbuettel.de
Internet: http://public.rz.fh-wolfenbuettel.de/%7ETurtur/physik/
Tel.: (++49) 5331 / 939 – 3412